Exercice 1:

On considère un espace à trois dimensions muni d'un repère d'observation cartésien ... angles θ et φ (voir

Page 1

Titre de TP

Date

Manip N°

Trinome N°:

- Nom prenom
- Nom ______
- ______

Groupe :

Pasco

Page 2

But (sujet de manipe [illegible] cinématique) on demande de faire quoi

I But(s)

II - Etude Théoriques :

III - Dispositif Exprimental : (Discription de la manip)

IV - Mesure : (Calculs d'Incertitude)

V - Resultats : (Expermental) (— ± C°)

VI - Analyse : (comme comparaison) entre th et pratique...

P1

- ✓ * Titre de TP
- ✓ * Date
- ✓ * Manip N°
- ✓ * Trinome N°
  - Nom prenom
  - ____
  - ____
- ✓ * Groupe :
- ✓ * But
- — * Etude Théorique ~~[illegible]~~
- * Dispositif Exprimental (discription de la manip)
- ✓ * Mesure + Calculs d'incertitude
- — * Resultat Expermental (— ± —)
- * Analyse (comme comparaison)

Exercice 1:
On considère un espace à trois dimensions muni d'un repère d'observation cartésien

Page 1

Titre de TP

Date

Manip N°:

Trinome N°:
- Nom prenom
- Nu
-

Groupe ;

Pasco

Page 2

But (sujet de manupe ... on demande de faire quoi)

I But(s)

II - Etude Théoriques :

III - Dispositif Exprimental : (Discription de la manip)

IV - Mesure : (Calculs d'Incertitude)

V - Resultats : (Expermental) (— ± C°)

VI - Analyse : (comme comparaison entre thé et pratique...)

P1

- ✓ * Titre de TP
- ✓ * Date
- ✓ * Manip N°:
- ✓ * Trinome N°:
  - Nom prenom
  - ——
  - ——
- ✓ * Groupe :
- ✓ * But
- — * Etude Théorique
- * Dispositif Exprimental (discription de la manip)
- ✓ * Mesure + Calculs d'incertitude
- — * Resultat Expermental (... ± ...)
- * Analyse (comme comparaison)

I- Cinématique du point :

Exercice 1 : ✓

- Un point matériel se déplace sur une parabole d'équation $y = 3.x^2$. La loi horaire concernant l'abscisse s'écrit : $x = 7.t$.

1- Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération en fct du temps.

2- Déterminer la distance parcourue entre $t=0$ et $t=5s$

Solution 1 :

1- $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x = 7.t \\ y = 3x^2 = 147.t^2 \end{cases}$ $\quad \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{vmatrix} v_x = 7 \\ v_y = 294.t \end{vmatrix}$ $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 \\ 294 \end{vmatrix}$

2- La norme de la vitesse : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V(t)$.

$$V(t) = \sqrt{49 + (294t)^2}$$

la distance parcourue entre $t=0$ et $t=5s$ est :

$$L = l(5) - l(0) = \int_{t=0}^{t=5s} dl = \int_{t=0}^{t=5s} \sqrt{49 + (294t)^2}\, dt.$$

où $\left[\frac{dl}{dt} = V(t) \Rightarrow dl = V(t).dt \right]$

$$L = \left[\frac{7}{2} t\sqrt{17641t^2 + 1} + \frac{1}{12} \operatorname{arcsinh}(42t) \right]_0^5 = 3113,13.$$

Exercice 2 : ✓

Un point matériel ~~(se déplace sur une parabole d'équation $y = 3x^2$: la loi horaire)~~ possède une accélération constante $\vec{a}_M = 8\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$ sa vitesse initiale est $\vec{V}_0 = -16\vec{e}_x + 12\vec{e}_y - 6\vec{e}_z$ et sa position initiale $\overrightarrow{OM}_0 = 5\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$

Déterminer $\vec{V}_M(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ et Montrez que le mvt est rectiligne.

Solutions:

La vitesse : $\vec{v}(t) = \vec{a}\,t + \vec{v}_0$ $\vec{a}$: accélération (constante).

La position : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$.

. $\vec{v}(t) = (8t - 16)\vec{e}'_x + (-6t + 12)\vec{e}'_y + (3t - 6)\vec{e}'_z$.

. $\overrightarrow{OM} = (4t^2 - 16t + 5)\vec{e}'_x + (-3t^2 + 12t - 4)\vec{e}'_y + (1{,}5t^2 - 6t)\vec{e}'_z$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} 4t^2 - 16t + 5 \\ -3t^2 + 12t - 4 \\ 1{,}5t^2 - 6t \end{cases}$$

$x(t) = 4t^2 - 16t + 5$

$y(t) = -3t^2 + 12t - 4$

$z(t) = 1{,}5t^2 - 6t$.

on a : $-2z + 4 = y$. $\Rightarrow z = -\frac{y+4}{2}$.

$$\frac{4y}{3} = -4t^2 + 16t - \frac{16}{3}$$

$\frac{4y}{3} + x = \frac{1}{3}$ donc $4y + 3x = 1$.

$$y = \frac{-3x + 1}{4}$$

$z = -\frac{y+4}{2}$ Donc le mvt est

$z = \frac{17 - 3x}{2}$ rectiligne.

De façon général, le mouvement est rectiligne si l'accélération et la vitesse sont colinéaires c'est à dire que leur produit vectoriel est égal à $\vec{0}$.

$\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t) = \vec{0}$ donc le mvt est rectiligne.

Exercice 3 : ✓

Soit un point materiel animé d'un mouvement uniforme qui décrit une trajectoire $y = 0$ pour $x \leq 0$

$y = \frac{2}{3} x^{3/2}$ pour $x \geq 0$

1 - Exprimer x et y sont les coordonnées du point M en fonction de x, V_x et V_y composantes de la vitesse :

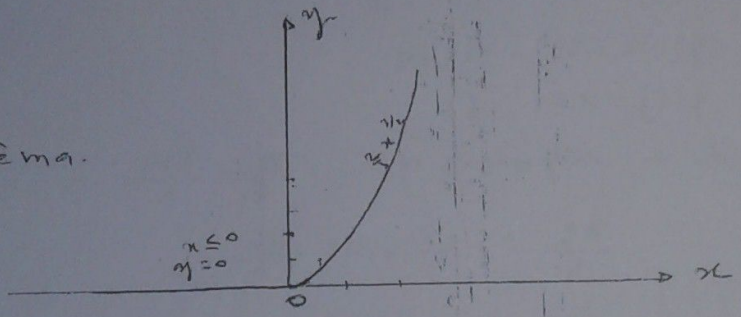
2 - Exprimer en fonction de x, a_x et a_y Composantes de l'accélération :

3 - Donner les equations horraires $x(t)$ et $y(t)$.

4 - Donner les equations de la vitesse en fonction du temps.

Solution 3.

schèma.



1°/ 1ère phase $x \leq 0$ $\quad y = 0 \quad V_y = 0 \quad v_x = v_0 = cte \quad x = v_0 t + c$

2ème phase : $x \geq 0$. $\quad v_y = \frac{dy}{dt}$ et $v_x = \frac{dx}{dt}$ et on a. $y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$

$$v_y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} \cdot v_x$$

donc $v_y = \sqrt{x} \cdot v_x \Rightarrow \boxed{\frac{v_y}{v_x} = \sqrt{x}}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0$$

$$= v_x \sqrt{1 + x} = v_0$$

donc $v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1+x}}$ et $v_y = v_0 \sqrt{\frac{x}{1+x}}$

2°/ Accelerations : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot v_x$

$$a_x = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{(1+x)^{3/2}} \cdot \frac{v_0}{(1+x)^{1/2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{1+x}\right)^2$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{v_0^2}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

3- Equations horaire:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{1+x}} \quad \text{donc} \quad dx = \frac{v_0\,dt}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^x dx\sqrt{1+x} = \int_0^t v_0\,dt$$

$$\frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^x = v_0 t$$

$$(x+1)^{3/2} = \frac{3}{2}v_0 t + 1$$

$$x(t) = \left(\frac{3}{2}v_0 t + 1\right)^{2/3} - 1$$

$$y(t) = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{2}v_0 t + 1\right)^{2/3} - 1\right]^{3/2}$$

4/ $v_x(t)$ et $v_y(t)$

$$v_x(t) = \frac{v_0}{(1+\frac{3}{2}v_0 t)^{1/3}}$$

$$v_y(t) = v_0\frac{\left((1+\frac{3}{2}v_0 t)^{2/3} - 1\right)^{1/2}}{(1+\frac{3}{2}v_0 t)^{1/3}}$$

Exercice: ✓ un pt Materiel est animé d'un mouvement dont les equations horaire sont données par: $x = 2t^2$ et $y = 4t(t-1)$

1. Determiner l'equation de la trajectoire
2. Determiner la vitesse.
3. Montrer que l'acceleration est constante, Determiner l'acceleration tangentielle et Normale.

Solution:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \qquad \vec{v}(t) = 2\vec{e}_x + (8t-4)\vec{e}_y$$

1/ $y = x^2 - 2x$

2/ $\|\vec{v}\| = v(t) = \sqrt{4+(8t-4)^2} = 2\sqrt{1+16t^2-16t+4} = 2\sqrt{5+16t^2-16t}$

3/ $\vec{a} = 8\vec{e}_y$. $a_T = \frac{dv}{dt}$ $a_N = \frac{v^2}{R}$

Exercice 4 : Coordonnées cylindriques ($z=0$) ✓

Soit un mobile qui suit la trajectoire

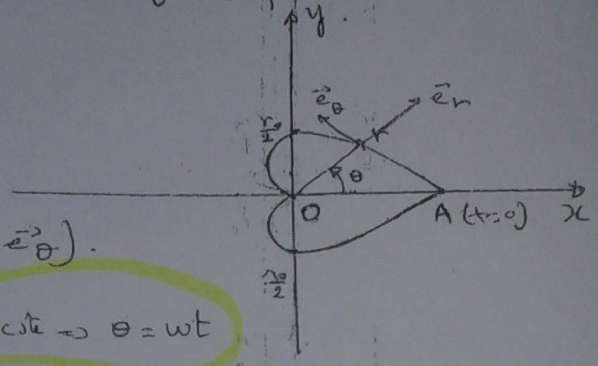
$r = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta)$. à $t=0$ $\theta = 0$.

et on suppose que $\dot{\theta} = \omega = cste$.

1- Exprimer la vitesse $\vec{v}$: en fonction du temps $\vec{v}(t)$ et puis en fonction de r $\vec{v}(r)$.

2- Déterminer l'accélération radiale $\vec{a}_r$ et la composante orthoradiale $\vec{a}_\theta$ en fonction de t.

Solution :



à $t=0$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} = r_0 \vec{e}_x$.

Le repère est donc cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

La base locale est polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. $\quad \dot{\theta} = \omega = cste \Rightarrow \theta = \omega t$

$\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

/ Vitesse linéaire : $\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\omega)^2}$.

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta)\right) = -\frac{1}{2} r_0 \omega \sin\theta$.

a- / $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2} r_0 \omega \left(\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2\right)^{1/2}$.

$= \frac{1}{2} r_0 \omega \left(2 + 2\cos\theta\right)^{1/2} = \left(2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} r_0 \omega$.

$\|\vec{v}\| = r_0 \omega \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ Donc $\boxed{V(t) = r_0 \omega \cos\frac{\omega t}{2}}$.

b- / on a : $V = \frac{\omega r_0}{2}\sqrt{2(1+\cos\theta)} = \frac{\omega r_0}{\sqrt{2}} (1+\cos\theta)^{1/2}$

on a : $r = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta)$

$(1+\cos\theta)^{1/2} = \left(\frac{2r}{r_0}\right)^{1/2}$

$\frac{\sqrt{2}\,V}{\omega r_0} = \left(\frac{2r}{r_0}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{V(r) = \omega \left(r_0 r\right)^{1/2}}$

Mouvement

2°/ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\quad \dot{\theta} = \omega = cst$

$= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta}$

$r = \frac{1}{2}r_0(1+\cos\theta)$.

$\dot{r} = -\frac{1}{2}r_0\omega_0\sin\theta$

$\ddot{r} = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2\cos\theta$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} + r\omega^2$

$= -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2\cos\theta + \frac{1}{2}r_0\omega^2(1+\cos\theta)$

$= -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1+\cos\theta\cos\theta)$

$a_r = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1+2\cos\theta)$

$a_\theta = -r_0\omega_0\sin\theta$.

$a_r(t) = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1+2\cos\omega t)$, $a_\theta(t) = -r_0\omega_0\sin\omega t$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \frac{r_0\omega_0}{2}\left[\left(1+8\cos^2\frac{\omega t}{2}\right)\right]^{1/2}$.

$$\boxed{a(r) = \frac{r_0\omega_0}{2}\left(1+\frac{8r^2}{r_0^2}\right)^{1/2}}$$

tjrs tu trouve le vecteu

t après le module

2°/ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$.

$\dot{\theta} = \omega = cte$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r$ $\quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta}$

$r = \frac{1}{2}r_0(1+\cos\theta)$.

$\dot{r} = -\frac{1}{2}r_0\omega_0\sin\theta$

$\ddot{r} = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2\cos\theta$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} + r\omega^2$

$= -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2\cos\theta + \frac{1}{2}r_0\omega^2(1+\cos\theta)$

$= -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1 + \cos\theta\cos\theta)$

$a_r = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1 + 2\cos\theta)$

$a_\theta = -r_0\omega_0\sin\theta$.

$a_r(t) = -\frac{1}{2}r_0\omega_0^2(1+2\cos\omega t)$, $a_\theta(t) = -r_0\omega_0\sin\omega t$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \frac{r_0\omega_0}{2}\left[\left(1 + 8\cos^2\frac{\omega t}{2}\right)\right]^{1/2}$.

$$a(r) = \frac{r_0\omega_0}{2}\left(1 + \frac{8r^2}{r_0^2}\right)^{1/2}$$

tjrs tu trouve le vecteur et après le module.

Exercice 5: ✓

Une particule M, se déplace sur une droite x'ox de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ A $t=0$ $x=0$ $V_0 = 2\,m/s$.

A un instant donné t, l'accélération est $\vec{a} = -k v^n \vec{e}_x$

k, n sont des constantes positives.

Pour chaque Cas: $n=1$, $n=2$, $n=4$

1°/ Ecrire en fonction de V_0 et k, les expression de la vitesse et de la position.

2°/ Calculer la vitesse à l'instant t pour $x = 250\,m$ si $a_0 = \vec{a}(t=0) = 2\,m/s^2$.

Solution 5: Mouvement rectiligne sur x'ox $\Rightarrow$ $\vec{OM} = x.\vec{e}_x$, $\vec{v} = v.\vec{e}_x$, $\vec{a} = a.\vec{e}_x$

1°/ 1er Cas: $n=1$.

$\vec{a} = -k v.\vec{e}_x$ $\quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv$

$\frac{dv}{v} = -k\,dt \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$

$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$.

2ème Cas: $n=2$:

$\vec{a} = -k v^2.\vec{e}_x \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -k\,dt$

$v(t) = \frac{v_0}{1 + k v_0 t}$ $\quad x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + k v_0 t)$

3ème Cas: $n=4$ $\quad \vec{a} = -k v^4.\vec{e}_x \Rightarrow \frac{dv}{v^4} = -k\,dt$

$v(t) = \frac{v_0}{(3 v_0^3 k t + 1)^{1/3}}$

$x(t) = \frac{1}{2k}\left[(3kt + v_0^{-3})^{2/3} - v_0^{-2}\right]$.

2°/ à $t=0$ $\quad a_0 = 2\,m/s^2$ $\quad v_0 = 2\,m/s$ $\quad \vec{a} = -k v^n \vec{e}_x$

$n=1$: $\vec{a}_0 = -k v_0 \vec{e}_x \Rightarrow k = +\frac{a_0}{v_0} = \frac{2}{2} = 1$

$n=2$: $\vec{a}_0 = -k v_0^2 \vec{e}_x$ $\quad k = \frac{a_0}{v_0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$n=4$: $\vec{a}_0 = -k v_0^4 \vec{e}_x$ $\quad k = \frac{a_0}{v_0^4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

* Ecrire v en fct de x.

$n=1$: $v(t) = v_0 e^{-kt}$

$x(t) = \frac{v_0}{k} - \frac{v(t)}{k}$ $\Rightarrow \{v(x) = -kx + v_0\}$

$x = 150$ m. $\quad -k = \frac{a_0}{v_0} = \frac{a_0}{v_0}$.

$v(x) = \boxed{\frac{a_0}{v_0} x + v_0}$.

$x = 150$ m. $\Rightarrow v(150\text{m}) = 152$ m/s.

$n \neq 2$ $\quad v(t) = \frac{v_0}{1 + k v_0 t}$

$\ln(v(t)) = \ln v_0 - \ln(1 + k v_0 t)$

$\frac{1}{k} \ln v = \frac{1}{k} \ln v_0 - \frac{1}{k} \ln(1 + k v_0 t)$

$\frac{1}{k} \ln v = \frac{1}{k} \ln v_0 - x$

$\frac{1}{k} \ln \frac{v}{v_0} = x$.

$\ln \frac{v}{v_0} = kx \Rightarrow v(x) = v_0 e^{-kx}$.

$v(x) = v_0 e^{\frac{a_0}{v_0} x}$.

$x = 150$ m $\quad v(150\text{m}) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 150}$.

$n=4$ de $\hat{m}$.

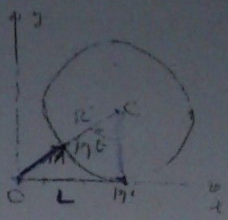
Ecrire $v(x)$ et Calculer $v(x = 150\text{m})$

Exercice N°6 : Cycloïde : Mouvement ✓

à $t = 0$: $\theta = 0$ dans $R(O, x, y, z)$

$OM' = 0$

$\dot{\theta} = \omega = cst \Rightarrow \theta = \omega t$.



- Le mouvement est composé d'un mouvement circulaire de M et d'un mouvement rectiligne de C.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CM}$$

$$= L\vec{e}_x + R\vec{e}_y + -R\sin\theta\,\vec{e}_x - R\cos\theta\,\vec{e}_y$$

$$= (L - R\sin\theta)\vec{e}_x + (R - R\cos\theta)\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{CM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y$$

$$= (L' - R\omega\cos\theta)\vec{e}_x + R\omega\sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$= L'\vec{e}_x + R\omega(-\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

On suppose que la roue roule sans glissement

Donc au pt M' point de contact avec le sol, la vitesse est nulle. $M = M'$ si $\theta = n2\pi$.

à $t = 0$: $\theta = 0$, $L = 0$ $\Rightarrow$ $L = R\omega = R\dot{\theta}$.

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R\omega(1 - \cos\theta)\vec{e}_x + R\omega\sin\theta\,\vec{e}_y$$

- $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CM}$

$$= R\vec{e}_y + (-R\sin\theta\,\vec{e}_x - R\cos\theta\,\vec{e}_y)$$

$$\overrightarrow{M'M} = -R\sin\theta\,\vec{e}_x + R(1 - \cos\theta)\vec{e}_y$$

$\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{v} = 0$ Donc $\overrightarrow{M'M} \perp \vec{v}$.

$\overrightarrow{M'M} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$

$x'^2 + (R - y')^2 = R^2$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_x + R\omega^2\cos\theta\,\vec{e}_y$

$\vec{a} = R\omega^2(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$

Exercice N°1 : Cinématique du projectile

Un projectile est lancé au temps $t = 0$ d'un point O pris comme origine de l'espace, dans le champs de la pesanteur. La vitesse initiale $\vec{V_0}$ fait un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ avec l'axe ox.

1. En négligeant les frottements :
   - Équation de la Trajectoire du projectile.
   - Coordonnées du point du sommet S, et le temps t_S
   - " de la portée B et le temps t_B

1 - Solution :

$\vec{a} = \vec{g}$ à $t=0$, $\vec{v} = \vec{v_0}$, $x = 0$

$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v_0}$

$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}_x t^2 + \vec{v_{0x}} t = v_{0x} t \cdot \vec{e}_x$

$\vec{y}(t) = -\frac{1}{2}\vec{g}_y t^2 + \vec{v_{0y}} t = \left(-\frac{1}{2} g^2 t^2 + v_{0y} t\right)\vec{e}_y$

$\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta \, \vec{e}_x + (gt + v_0 \sin\theta)\vec{e}_y$

$x(t) = v_0 t \cos\theta$

$y + \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin\theta$

$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = v_0^2 t^2$

$$\left\{ y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + x \operatorname{tg}\theta \right\}$$

2 - S. Sommet : $x_S = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$; $y_S = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

$t_S = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$

B. porte $x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ $y_B = 0$ $t_B = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$

II- Dynamique du point.

II-2 Traiter un problème de la dynamique.

- Identifier le système Etudié (tjs un point !!)
- Définir le repère, référentiel et Base locale selon le mouvement du point (ele but est de simplifier et faciliter l'étude).
- faire le bilan des forces exercé sur le point.
- Exprimer toutes les grandeurs Vecteurs (position, vitesse, accélération, forces, ...) dans le repère où la base choisie.
- A l'aide du principe fondamental de la dynamique ou d'un autre théorème ; Ecrire l'équation du mouvement, On obtient alors l'équation différentielle
- Résolution de l'équation en injectant les conditions aux limites à $x=0$ $y=0$, $z=0$ et Conditions initiales : à $t=0$.

II-2: Principe fondamental de la dynamique:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Dans $R(O,x,y,z)$: $\sum \left[f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z \right] = m\left(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \right)$

3: Théorème du moment Cinétique.

Dans le Référentiel R

- Le moment Cinétique : $\vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$
- Moment d'une force $\vec{F}$: $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O(M/R) = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})$$

$$\left\{ m\frac{d}{dt}\left[\vec{OM} \wedge \vec{v} \right] = \sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F} \right) \right\}$$

de TD

2- Théorème Energétique

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$ $\vec{F}$: forces conservatives $\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

$E_m = E_c + E_p$

- Puissance d'une force : $\mathcal{P}(\vec{F}/R) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ = $\frac{dW}{dt}$

→ Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt}(M/R) = \Sigma \mathcal{P}(\vec{F}/R).$$

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})\,dt = \Delta E_c \Big)_1^2$$

→ Théorème de la puissance mécanique forces non conservatives

$$\Sigma \mathcal{P}(\vec{F}_{nacons}/R) = \frac{d E_m(M/R)}{dt}$$

→ $\Sigma W(\vec{F}_{nacons}/R) = \Delta E_m$.

Manip N°

Pasco

13.

Exercice 1.

Soit un point materiel M de masse m, repéré en coordonnées polaires planes (r, θ) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Le mouvement de M est défini par la somme vectorielle des forces : $\vec{F}_1 = -m k^2 \vec{r}$

$\vec{F}_2 = -2m\Omega \vec{v}$. avec $0 < \Omega < k$

a/ Ecrire les équations du mouvement

b/ En supposant $\ddot{\theta} = 0$ determiner :

$r(t), \theta(t)$ en déduire $r(\theta)$, la vitesse de la particule

Solution :

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{r}' = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{r}'' = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.

$\vec{F}_1 = -m k^2 r \vec{e}_r$.

$\vec{F}_2 = -2m\Omega(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$.

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{r}''$

Suivant $\vec{e}_r$: $-mk^2 r - 2m\Omega\dot{r} - m\ddot{r} = -rm\dot{\theta}^2$ (1)

" $\vec{e}_\theta$ $-2m\Omega r\dot{\theta} = 2m\dot{r}\dot{\theta} + rm\ddot{\theta}$ (2)

b/ $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cste$

(1) : $-k^2 r - 2\Omega\dot{r} - \ddot{r} = -r\dot{\theta}^2$

(2) $-\Omega r = \dot{r}$ à $t = 0$ $r = r_0$ $\theta = 0$

(2) $\Rightarrow$ $r(t) = r_0 e^{-\Omega t}$ (3)

(1)+(3) $\Rightarrow$ $-k^2 r + 2\Omega^2 r - \Omega^2 r = -r\dot{\theta}^2$

$-k^2 + \Omega^2 = -\dot{\theta}^2$ $0 < \Omega < k$.

$k^2 - \Omega^2 = \dot{\theta}^2$ $k^2 - \Omega^2 > 0$

$\dot{\theta} = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$

$\theta(t) = \sqrt{k^2 - \Omega^2}\, t$ $\Rightarrow \theta = \dot{\theta} t$

$\vec{v}(t) = -\Omega r \vec{e}_r + \sqrt{k^2 - \Omega^2}\, r \vec{e}_\theta$

$\|\vec{v}\| = kr = kr_0 e^{-\lambda t}$

Exercice 2 :

Du point le plus bas M_0 d'un cylindre creux, de rayon R et d'axe Δ horizontal, est lancée une particule de masse m avec une vitesse v_0. La particule M, qui se déplace dans le plan de section droite du cylindre de Centre O, est repérée à chaque instant par l'angle $\theta = (\widehat{\vec{OM_0}, \vec{OM}})$. $\vec{g}$ le champ de la pesanteur, M glisse sans frottement à l'intérieur du cylindre.

1- A l'aide du P.F.D exprimer :
- $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ
- La réaction Normale $N(\theta)$ du cylindre sur la particule.

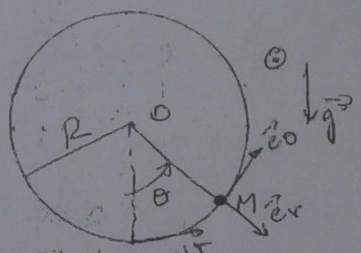
2- Calculer l'amplitude θ_m des oscillations de M pour $v_0 = \sqrt{gR}$ et pour $v_0 = \sqrt{\frac{7}{5}gR}$

3- Pour quelles valeurs de la vitesse initiale v_0, la particule M sera t-elle animée d'un mouvement révolutif (de même sens)

Solution :

Système étudié : point M.

base locale : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.



Bilan des forces : $\sum \vec{F} = m\vec{g}$

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

Réaction : $\vec{R} = \vec{R_r} = R_r\vec{e_r} + R_z\vec{e_z}$ $R_\theta = 0$ (sans frottement)

P.F.D : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$r = R = cste \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

→ Suivant $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta$

Integrale $\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{R}\cos\theta + cte$

$t = 0$, $\theta = 0$ $\quad \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = R\dot{\theta}(0)\vec{e}_\theta = v_0\vec{e}_\theta$

d'où $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$

$\theta = 0$ mais $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R} \neq 0$

Donc $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$

→ Suivant $\vec{e}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = R_r + mg\cos\theta$

$R_r = -mR\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

$= -m\frac{v_0^2}{R} + mg(2 - 3\cos\theta)$

R_r est la Composante Normale à la paroi du cylindre

$N(\theta) = m\frac{v_0^2}{R} - mg(2 - 3\cos\theta)$

2 - Amplitude θ_M des oscillations de M pour $v_0 = \sqrt{gR}$ et $v_0 = \sqrt{\frac{7}{5}gR}$.

$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$

θ est maximum si $\dot{\theta} = 0$

donc $\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta) = 0$

$\theta_M = 1 - \frac{v_0^2}{2gR}$

- $v_0 = \sqrt{gR} \Rightarrow \cos\theta_M = 1/2$ et $\theta_M = 60°$
- $v_0 = \sqrt{\frac{7}{5}gR}$ $\cos\theta_M = \frac{3}{10}$ et $\theta_M = 72°33'$

3/ Mouvement Révolutif $\Rightarrow N(\theta) > 0$

$N(\theta)$ est minimale si $N'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi$ et $N(\pi) = m\frac{v_0^2}{g} - 5mg$

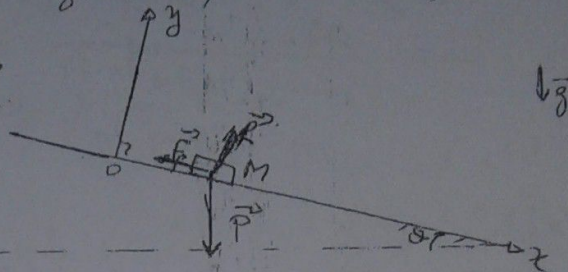
$N(\pi) > 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{5gR}$

Exercice 3 : plan Incliné. -16- (1)

Un point materiel de masse m glisse sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (angle θ). Le

Le point materiel est abandonné à t = 0 avec une vitesse v_0 portée par la ligne de plus grande pente et dirigée vers le haut.

Etudier le mvt du point



Solution :

Système étudié point M.

Repère : $R(O, x, y)$ plan.

Bilan des forces :

Poids : $\vec{P} = mg\sin\theta\,\vec{e}_x - mg\cos\theta\,\vec{e}_y$

frottement solide : $\vec{F}_f = -f_{fx}\,\vec{e}_x$

réaction $\vec{R} = R_y\,\vec{e}_y$

$\vec{OM} = x\vec{e}_x \qquad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$mg\sin\theta\,\vec{e}_x - mg\cos\theta\,\vec{e}_y - \vec{f}_{fx}\,\vec{e}_x + R_y\,\vec{e}_y = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$$

$$mg\sin\theta - f_f = m\ddot{x}$$

$$-mg\cos\theta + R_y = 0$$

frottements solide $\Rightarrow$ f : Coefficient de frottement $f = \tan\varphi$

$$\vec{f}_f = -f\,\|\vec{R}\|\,\frac{\vec{v}_m}{\|\vec{v}\|} = -f\,\|\vec{R}\|\,\vec{e}_x$$

$$-f_{fx} = -f R_y = +f mg\cos\theta$$

Supposons M en mouvement dans le sens de $-\vec{e}_x$.

$$F_{fx} = -f mg\cos\theta$$

d'où $m\ddot{x} = mg\sin\theta + f mg\cos\theta$

$$\ddot{x} = g\cos\theta\,(\tan\theta + \tan\varphi) = cste$$

On a donc un mouvement rectiligne uniformément varié

$\dot{x} = g\cos\theta(\tan\theta - \tan\varphi_0)t - v_0$

$x(t) = \frac{1}{2} g\cos\theta(\tan\theta + \tan\varphi_0)t^2 - v_0 t + x_0$

Il existe $t_1 > 0$ / $\dot{x}(t_1) = 0$

$\therefore \quad t_1 = \dfrac{v_0}{g\cos\theta(\tan\theta + \tan\varphi)}$

Pour $t \geq t_1$ M immobile

$x(t_2) = x_1$

$m\ddot{x}_1 = mg\sin\theta + f mg\cos\theta = mg\sin\theta - f_{fx}$

$-mg\cos\theta + R_y = 0$

M immobile $\Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$f_{fx} = -mg\sin\theta$

$R_y = mg\cos\theta$

si $\dfrac{|f_{fx}|}{|R_y|} = \tan\theta$

si $\theta \leq \varphi$ M reste immobile.

si $\theta > \varphi$ M est en mouvement dans le sens de $\vec{e}_x$

$\ddot{x} = g\cos\theta(\tan\theta - \tan\varphi)$

$\dot{x} = g\cos\theta(\tan\theta - \tan\varphi)(t - t_1) + x_1$